Matematyka Dyskretna

Ćwiczenia – Lista 1

Zadanie 1.

(a) $a_n = \dfrac{2n^{81.2} + 3n^{45.1}}{4n^{23.3} + 5n^{11.3}}$, $\quad a_n = O(n^{57.9})$

Dowód.

- Sprawdźmy, czy $k = 57.9$ spełnia definicję:

$$f(n) = O(g(n)) \iff \exists_{c>0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n\geq n_0}\ |f(n)| \leq c\cdot|g(n)|$$

$$\exists_{c>0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n\geq n_0}\quad \left|\frac{2n^{81.2} + 3n^{45.1}}{4n^{23.3} + 5n^{11.3}}\right| \cdot \left|\frac{1}{n^{57.9}}\right| \overset{?}{\leq} c$$

$$\left|\frac{2n^{23.3} + 3n^{-12.8}}{4n^{23.3} + 5n^{11.3}}\right| \overset{?}{\leq} c$$

$$\left|\frac{2 + 3n^{-36.1}}{4 + 5n^{-12}}\right| \overset{?}{\leq} c$$

$$\left|2 + 3n^{-36.1}\right| \overset{?}{\leq} c\cdot\left|4 + 5n^{-12}\right|$$

$$\left|2 + \frac{3}{n^{36.1}}\right| \overset{?}{\leq} c\cdot\left|4 + \frac{5}{n^{12}}\right|$$

Tak! (lewa strona nierówności przy $n \to \infty$ dąży do 2, a prawa do $4c$).

- Zobaczmy, czy $k = 57.9$ jest rzeczywiście najmniejsze:
Przypuśćmy, że $a_n = O(n^{57.9-\epsilon})$ dla pewnego $\epsilon > 0$.

$$\exists_{c>0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n\geq n_0}\quad \left|\frac{2n^{81.2} + 3n^{45.1}}{4n^{23.3} + 5n^{11.3}}\right| \cdot \left|\frac{1}{n^{57.9-\epsilon}}\right| \overset{?}{\leq} c$$

$$\left|2n^{81.2} + 3n^{45.1}\right| \overset{?}{\leq} \left|c\cdot 4n^{81.2-\epsilon}\right| + \left|c\cdot 5n^{69.2-\epsilon}\right|$$

$$\left|2 + 3n^{-36.1}\right| \overset{?}{\leq} \left|c\cdot 4n^{-\epsilon}\right| + \left|c\cdot 5n^{-12-\epsilon}\right|$$

$$\left|2 + \frac{3}{n^{36.1}}\right| \overset{?}{\leq} \left|\frac{4c}{n^{\epsilon}}\right| + \left|\frac{5c}{n^{12+\epsilon}}\right| \qquad \textit{Sprzeczność!}$$

Lewa strona nierówności przy $n \to \infty$ dąży do 2, a prawa do 0, zatem $k = 57.9$ jest faktycznie najmniejsze.

□

(b) $a_n = 5^{\log_2 n}$, $\quad a_n = O(n^{\log_2 5})$

Dowód.

$$a_n = 5^{\log_2 n} = 2^{\log_2 5\,\cdot\,\log_2 n} = (2^{\log_2 n})^{\log_2 5} = n^{\log_2 5}$$

□

(c) $a_n = 1.001^n$, ten ciąg nie jest ograniczony od góry przez żaden wielomian.

(d) $a_n = n\log^3 n$, dowolny wielomian ogranicza od góry ten ciąg. Jeśli $k \in \mathbb{N}$ to $k = 2$. Jeśli $k \in \mathbb{R}$ to k jest postaci $1 + \epsilon$, $\epsilon > 0$ i przy $\epsilon \to 0$ otrzymujemy coraz dokładniejsze oszacowanie, jednakże nie istnieje takie **najmniejsze** k spełniające to równanie.

Zadanie 2.

Uporządkowanie funkcji (kolejne funkcje są asymptotycznie niemniejsze, tzn. każda poprzednia jest równa o od następnej):

- 0.99^n – funkcja malejąca
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ – funkcja zbieżna do e
- $\log_2 n$
- n
- $\log_2(n^n) = n \cdot \log_2 n$
- $3^{\log_2 n} = 2^{\log_2 3 \cdot \log_2 n} = n^{\log_2 3}$
- $n^2 = 2^{2 \cdot \log_2 n}$
- $n^{\log_2 n} = 2^{\log_2 n \cdot \log_2 n} = 2^{\log_2^2 n}$
- $2^{\sqrt{n}}$
- $1.01^n = 2^{n \cdot \log_2 1.01}$
- $(\log_2 n)^n = 2^{\log_2 \log_2 n \cdot n}$

Zadanie 3.

$$f(n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} i! & \text{dla nieparzystych } n \\ \sum_{i=0}^{n} i! & \text{dla parzystych } n \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} i! & \text{dla nieparzystych } n \\ \sum_{i=0}^{n-1} i! & \text{dla parzystych } n \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i! = \sum_{i=0}^{n-1} i! + n!$$

$$\text{Niech } v = \sum_{i=0}^{n-1} i!$$

Funkcje $f(n)$ i $g(n)$ monotonicznie rosną do ∞.

- Czy $f(n) \stackrel{?}{=} o(g(n))$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{v}{v+n!} = 0 \quad \text{dla nieparzystych } n$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{v+n!}{v} \neq 0 \quad \text{dla parzystych } n$$

  Zatem $f(n) \neq o(g(n))$.

- Czy $g(n) \stackrel{?}{=} o(f(n))$. Nie! j.w., tylko nie „zajdzie” dla nieparzystych n.
- Czy $f(n) \stackrel{?}{=} \Theta(g(n))$.

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff \exists_{c,d>0}\, c \cdot g(n) \leq f(n) \leq d \cdot g(n)$$

Dla nieparzystych n:

$$c \cdot (v + n!) \leq v \leq d \cdot (v + n!) \quad / : v$$
$$c + \frac{c\,n!}{v} \leq 1 \leq d + \frac{d\,n!}{v}$$

Nie istnieje $c > 0$ spełniające powyższą nierówność, zatem równość $f(n) = \Theta(g(n))$ nie zachodzi (bo nie zachodzi dla nieparzystych n).

Zadanie 4.

Udowodnij, że $n^a(\log n)^b(\log\log n)^c$ jest $o\big(n^d(\log n)^e(\log\log n)^f\big) \iff (a,b,c) \prec (d,e,f)$, dla $\prec$ oznaczającej porządek leksykograficzny.
Niech $d = (a + d')$, $e = (b + e')$, $f = (c + f')$ dla pewnych d', e', f'.

$$\frac{n^a(\log n)^b(\log\log n)^c}{n^d(\log n)^e(\log\log n)^f} = \frac{n^a(\log n)^b(\log\log n)^c}{n^{a+d'}(\log n)^{b+e'}(\log\log n)^{c+f'}} =$$
$$\frac{n^a(\log n)^b(\log\log n)^c}{n^a \cdot n^{d'} \cdot (\log n)^b \cdot (\log n)^{e'} \cdot (\log\log n)^c \cdot (\log\log n)^{f'}} = \frac{1}{n^{d'}(\log n)^{e'}(\log\log n)^{f'}}$$

i) jeśli $(a,b,c) \prec (d,e,f)$ to prawdziwe jest $(a < d \vee (a = d \wedge b < e) \vee (a = d \wedge b = e \wedge c < f))$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{d'}(\log n)^{e'}(\log\log n)^{f'}} = 0$ gdyż wykładnik przy funkcji asymptotycznie największej jest nieujemny. Stąd wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^a(\log n)^b(\log\log n)^c}{n^d(\log n)^e(\log\log n)^f} = 0$,
czyli $n^a(\log n)^b(\log\log n)^c$ jest $o\big(n^d(\log n)^e(\log\log n)^f\big)$

ii) jeśli (a,b,c) i (d,e,f) nie były w relacji $\prec$, czyli nie był zachowany porządek leksykograficzny, załóżmy, że $a > d$ czyli d' ma wartość ujemną.
Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{d'}(\log n)^{e'}(\log\log n)^{f'}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{-d'}}{(\log n)^{e'}(\log\log n)^{f'}} = \infty$, czyli
$n^a(\log n)^b(\log\log n)^c$ nie jest $o\big(n^d(\log n)^e(\log\log n)^f\big)$.

Zadanie 5.

(a) $f = o(g) \implies f = O(g)$.

Dowód.

$$f(n) = o(g(n)) \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \implies \forall_{\epsilon>0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n>n_0} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} \leq \epsilon$$
$$\implies \exists_{c>0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n>n_0} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} \leq c \implies \exists_{c>0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n>n_0} |f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$$
$$\overset{\text{def}}{\iff} f(n) = O(g(n))$$

□

(b) $f \sim g \implies f = \Theta(g)$.

Dowód.

$$f \sim g \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \implies \forall_{\epsilon>0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n>n_0} \left(1 - \epsilon \leq \frac{|f(n)|}{|g(n)|} \;\wedge\; \frac{|f(n)|}{|g(n)|} \leq 1 + \epsilon\right)$$
$$\implies \forall_{\epsilon>0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n>n_0}\ (1-\epsilon) \cdot |g(n)| \leq |f(n)| \;\wedge\; |f(n)| \leq (1+\epsilon) \cdot |g(n)|$$
$$\implies \exists_{c,d}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n>n_0}\ c \cdot |g(n)| \leq |f(n)| \leq d \cdot |g(n)| \overset{\text{def}}{\iff} f(n) = \Theta(g(n))$$

□

(c) $f = O(g) \iff g = \Omega(f)$.

Dowód.

$$\begin{aligned} f(n) = O(g(n)) &\overset{\text{def}}{\iff} \exists_{c>0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n \geq n_0}\, |f(n)| \leq c \cdot |g(n)| \\ &\iff \exists_{d>0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n \geq n_0}\, |g(n)| \geq d \cdot |f(n)| \overset{\text{def}}{\iff} g(n) = \Omega(f(n)) \end{aligned}$$

□

(d) $f = O(g) \land g = O(f) \iff g = \Theta(f)$.

Dowód.

$$\begin{aligned} f(n) = O(g(n)) \land g(n) = O(f(n)) &\iff \exists_{c,d}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n>n_0}\, |f(n)| \leq c \cdot |g(n)| \land |g(n)| \leq d \cdot |f(n)| \\ &\iff \exists_{c,e}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n>n_0}\, e \cdot |f(n)| \leq |g(n)| \leq c \cdot |f(n)| \iff g(n) = \Theta(f(n)) \end{aligned}$$

□

Wszystkie symbole o, O, $\sim$, Θ, Ω są przechodnie. Symetryczne są jedynie $\sim$ oraz Θ. Dowody tych własności wynikają wprost z definicji poszczególnych symboli.

Zadanie 6.

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Dowód.

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$$e^{\frac{1}{n}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^i \cdot i!} = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^i \cdot i!}$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^i \cdot i!} \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^i} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

□

Zadanie 7.

Ilość potrzebnych porównań:

dla	1	najmniejszego wyrazu	$\cdots$	$(n-1)$
dla	2	najmniejszego wyrazu	$\cdots$	$(n-2)$
dla	3	najmniejszego wyrazu	$\cdots$	$(n-3)$
	$\vdots$			$\vdots$
dla	$(n-1)$	najmniejszego wyrazu	$\cdots$	1
dla	n	najmniejszego wyrazu	$\cdots$	0

Zatem:

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n}{2} \cdot n$$

Więc złożoność tego algorytmu to $O(n^2)$.

Zadanie 8.

(a) **złożoność czasowa pisemnego dodawania.**
Operacja jednostkowa to dodawanie 2 cyfr (liczb jednocyfrowych).
Złożoność w takim przypadku to $O(n)$.

$$
\begin{array}{rcccccccl}
 & & \square & \square & \square & \square & \square & & \text{max. } (n-1) \text{ przeniesień} \\
 & & \square & \square & \square & \square & \square & \square & n \\
+ & & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle & n \\
\hline
 & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond &
\end{array}
$$

(b) **złożoność czasowa pisemnego mnożenia.**
Operacja jednostkowa to mnożenie lub dodawanie liczb jednocyfrowych.
Złożoność:

$$n \cdot (n \text{ mnożeń} + (n-1) \text{ przeniesień}) + n \text{ dodawań liczb długości } (2n-1)$$

$$
\begin{array}{rcccccccl}
 & & & & & \square & \square & & \text{max. } (n-1) \text{ przeniesień} \\
 & & & & \square & \square & \square & & n \\
\times & & & & \triangle & \triangle & \triangle & & n \\
\hline
 & & 0 & 0 & \circ & \circ & \circ & & \\
 & & 0 & \circ & \circ & \circ & 0 & & n \text{ dodawań liczb długości } (2n-1) \\
+ & & \circ & \circ & \circ & 0 & 0 & & \\
\hline
 & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & &
\end{array}
$$

$$T(l,k) = n \cdot (2n-1) + n \cdot (2n-1) = 2n(2n-1) = 4n^2 - 2n$$

Zatem złożoność czasowa pisemnego mnożenia wynosi $O(n^2)$.

Zadanie 10.

Oszacowanie sumy $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$:

$$\int_0^n \frac{1}{x+1}\,dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{x}\,dx + 1$$

$$\ln|n+1| < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \ln|n|$$

Zadanie 13.

(a) w przedziale $[a,b]$ jest $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1$ liczb całkowitych,
Tak jest, ponieważ $\lfloor b \rfloor$ to największa liczba całkowita należąca do tego przedziału, natomiast $\lceil a \rceil$ to najmniejsza liczba całkowita należąca do tego przedziału.

(b) w przedziale $[a,b)$ jest $\lceil b \rceil - \lceil a \rceil$ liczb całkowitych,

- największa liczba całkowita należąca do tego przedziału to $\lfloor b \rfloor - 1$ (gdy $b \in \mathbb{Z}$) lub $\lfloor b \rfloor$ (gdy $b \notin \mathbb{Z}$),
- najmniejsza liczba całkowita należąca do tego przedziału to $\lceil a \rceil$,

Gdy $b \in \mathbb{Z}$ mamy:

$$\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil = \lceil b \rceil - \lceil a \rceil \text{ (ponieważ } \lfloor b \rfloor = \lceil b \rceil)$$

Gdy $b \notin \mathbb{Z}$ mamy:

$$\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1 = \lceil b \rceil - \lceil a \rceil \text{ (ponieważ } \lfloor b \rfloor + 1 = \lceil b \rceil)$$

(c) w przedziale $(a, b]$ jest $\lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$ liczb całkowitych,

- $\lfloor b \rfloor$ – największa liczba całkowita należąca do tego przedziału,
- $\lceil a \rceil + 1$ (gdy $a \in \mathbb{Z}$) lub $\lceil a \rceil$ (gdy $a \notin \mathbb{Z}$) – najmniejsza liczba całkowita należąca do tego przedziału,

Gdy $a \in \mathbb{Z}$ mamy:

$$\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil - 1 + 1 = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor \text{ (ponieważ } \lfloor a \rfloor = \lceil a \rceil)$$

Gdy $a \notin \mathbb{Z}$ mamy:

$$\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil - 1 = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor \text{ (ponieważ } \lceil a \rceil + 1 = \lfloor a \rfloor)$$

(d) w przedziale (a, b) jest $\lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$ liczb całkowitych,

- $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$
  - $\lfloor b \rfloor - 1$ – największa liczba całkowita należąca do tego przedziału,
  - $\lceil a \rceil + 1$ – najmniejsza liczba całkowita należąca do tego przedziału,

$$\lfloor b \rfloor - 1 - \lceil a \rceil - 1 + 1 = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$$

- $a \in \mathbb{Z}$, $b \notin \mathbb{Z}$
  - $\lfloor b \rfloor$ – największa liczba całkowita należąca do tego przedziału,
  - $\lceil a \rceil + 1$ – najmniejsza liczba całkowita należąca do tego przedziału,

$$\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil - 1 + 1 = \lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$$

- $a \notin \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$
  - $\lfloor b \rfloor - 1$ – największa liczba całkowita należąca do tego przedziału,
  - $\lceil a \rceil$ – najmniejsza liczba całkowita należąca do tego przedziału,

$$\lfloor b \rfloor - 1 - \lceil a \rceil + 1 = \lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$$

- $a \notin \mathbb{Z}$, $b \notin \mathbb{Z}$
  - $\lfloor b \rfloor$ – największa liczba całkowita należąca do tego przedziału,
  - $\lceil a \rceil$ – najmniejsza liczba całkowita należąca do tego przedziału,

$$\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1 = \lceil b \rceil - 1 - \lfloor a \rfloor - 1 + 1 = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$$

Zadanie 14.

Dla dowolnego $x \geq 0$ zachodzi $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor$.

Dowód.
Fakty:

$$x \geq \lfloor x \rfloor \;\Rightarrow\; \sqrt{x} \geq \sqrt{\lfloor x \rfloor} \;\Rightarrow\; \lfloor \sqrt{x} \rfloor \geq \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor \tag{1}$$

$$\exists_{a \in \mathbb{N}}\; a \leq \lfloor x \rfloor \leq x < (a+1) \tag{2}$$

Da się znaleźć takie b, że:

$$\exists_{a,b \in \mathbb{N}}\; b^2 \leq a \leq \lfloor x \rfloor \leq x < (a+1) \leq (b+1)^2$$

- Dla $x = 0$ powyższa nierówność zachodzi, gdy $a = b = 0$.
- Dla $x > 0$:

$$b^2 \leq \lfloor x \rfloor \leq x < (b+1)^2$$

$$\Downarrow$$

$$b \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq \sqrt{x} < (b+1)$$

Ponieważ b oraz $b+1$ są liczbami naturalnymi:

$$\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = b = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

□