

**Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 1.**

1. Dla każdego z poniższych ciągów znajdź najmniejsze  $k$  takie, że  $a_n = O(n^k)$

(a)  $a_n = (2n^{81.2} + 3n^{45.1}) / (4n^{23.3} + 5n^{11.3})$

(b)  $a_n = 5^{\log_2 n}$       (c)  $a_n = (1.001)^n$       (d)  $a_n = n \log^3 n$

2. Uporządkuj funkcje (wszystkie logarytmy mają podstawę 2):

$$\log n, (\log n)^n, n^{\log n}, \log(n^n), 3^{\log n}, n, n^2, 2^{\sqrt{n}}, 1.01^n, 0.99^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

3. Podaj przykład takich funkcji  $f(n)$  i  $g(n)$ , że żadna z trzech relacji  $f(n) = o(g(n))$ ,  $g(n) = o(f(n))$ ,  $f(n) = \Theta(g(n))$  nie jest prawdziwa, chociaż obie funkcje monotonicznie rosną do  $\infty$ .

4. Wykaż, że  $n^a (\log n)^b (\log \log n)^c$  jest  $o(n^d (\log n)^e (\log \log n)^f)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $(a, b, c) \prec (d, e, f)$ , gdzie  $\prec$  oznacza porządek leksykograficzny (tj. taki, jak w słowniku).

5. Pokaż, że:

(a) jeśli  $f = o(g)$ , to  $f = O(g)$ ,

(b) jeśli  $f \sim g$ , to  $f = \Theta(g)$ ,

(c)  $f = O(g)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $g = \Omega(f)$ ,

(d)  $f = O(g)$  i  $g = O(f)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $g = \Theta(f)$ ,

Które z pięciu symboli  $o, O, \sim, \Theta, \Omega$  są przechodnie? Które z nich są symetryczne?

6. Wykaż, że

$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

7. Rozważmy algorytm sortujący  $n$  liczb w następujący sposób. Wybierz najmniejszą, postaw na pierwszym miejscu, wybierz najmniejszą z pozostałych i postaw na drugim miejscu, najmniejszą z pozostałych postaw na trzecim miejscu itd. aż do wyczerpania liczb. Określ złożoność czasową powyższej procedury.

8. Oceń złożoność czasową pisemnego dodawania i mnożenia liczb długości  $n$ .

9. Oceń złożoność czasową pisemnego dzielenia dwóch liczb długości nie większej niż  $n$  przez siebie w najgorszym przypadku. W tym celu rozważ wszystkie możliwe długości  $k$  i  $l$  dzielonych liczb. Który z układów  $k$  i  $l$  daje największy czas działania procedury?

10. Używając całkowania oszacuj (podobnie jak na wykładzie) sumę

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

11. Niech  $h(n) = f(n) + O(g(n))$ , gdzie  $g(n) \prec f(n)$ . Podaj najlepsze jakie umiesz oszacowanie na  $1/h(n)$ . Oszacowanie powinno mieć postać  $F(n) + O(G(n))$ .

12. Niech  $f(n) = \ln n + 1/n + O(n^{-2})$  i  $g(n) = \frac{2^n}{n}(1 + O(n^{-1}))$ . Znajdź najlepsze asymptotyczne oszacowanie  $f(g(n))$ .

13. Wykaż, że ilości liczb całkowitych w następujących przedziałach są odpowiednio równe ( $a < b$ ):

(a) w  $[a, b] — [b] — [a] + 1$

(c) w  $(a, b] — [b] — [a]$

(b) w  $[a, b) — [b] — [a]$

(d) w  $(a, b) — [b] — [a] — 1$

14. Pokaż, że dla dowolnego  $x \geq 0$

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor.$$

15. Pokaż, że

(a)  $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$  i  $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$  są wyrażeniami przybliżającymi dowolną liczbę rzeczywistą  $x$  najbliższą niej liczbą całkowitą. Do czego przybliżają one liczby znajdujące się dokładnie w połowie między kolejnymi liczbami całkowitymi?

(b) Ile rozwiązań  $x$  ma równanie  $(n+1)x - \lfloor nx \rfloor = c$ ?